МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА імені О. М. БЕКЕТОВА

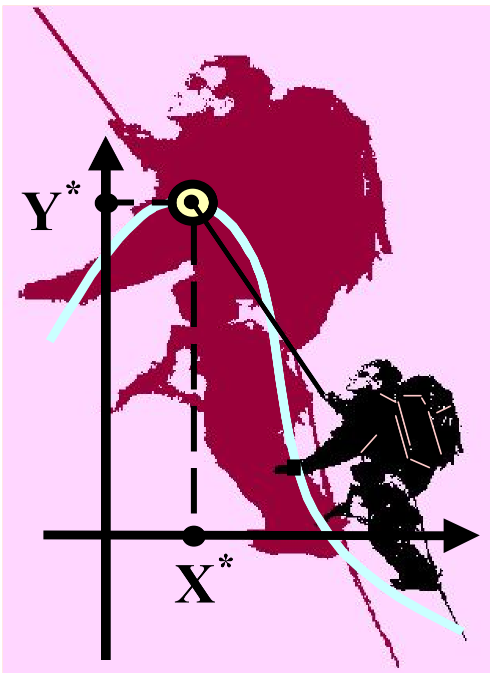
МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання контрольної роботи

з дисципліни

# *МАТЕМАТИЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ*

*(для студентів 3-го курсу заочної форми навчання
освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр
у галузі знань 0306 «Менеджмент і адміністрування»
за напрямом підготовки 6.030601 «Менеджмент»)*




Харків – ХНУМГ – 2013

Методичні вказівки до виконання контрольної роботи з дисципліни “Математичне програмування ” (для студентів 3-го курсу заочної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр у галузі знань 0306 «Менеджмент і адміністрування» за напрямом підготовки 6.030601 «Менеджмент») / Харк. нац. ун-т. міськ. госп-ва ім. О. М. Бекетова; уклад.: М. І. Самойленко, О. В. Клименко, Г. В. Білогурова, О. Б. Костенко, О. М. Штельма. – Х.: ХНУМГ ім. О. М. Бекетова, 2013. –46 с.

Укладачі: М. І. Самойленко,
О. В. Клименко,
Г. В. Білогурова,
О. Б. Костенко,
О. М. Штельма.

Рецензент: проф. кафедри вищої математики, д. ф. -м. н. А. І. Колосов

Рекомендовано кафедрою Прикладної математики та інформаційних технологій, протокол №15 від 30.05.11.

## МЕТА ТА ПРЕДМЕТ ДИСЦИПЛІНИ

***Мета дисципліни*** – сприяти подальшому підвищенню рівня фундаментальної математичної підготовки студентів та забезпечити майбутніх фахівців математичними методами прийняття оптимальних рішень.

***Предмет дисципліни*** – екстремальні задачі, що виникають в інженерній практиці, та методи їх розв'язання.

## ПРОГРАМА КУРСУ

### *Елементи матричної алгебри*

Матриця. Вектор. Математичні дії над матрицями. Лінійна функція і лінійна форма у матричному вигляді. Квадратична функція і квадратична форма у матричному вигляді.

### *Елементи теорії множин*

Поняття множини. Математичні дії з множинами. Порожня множина. Основні точкові множини. Неявне завдання точкових множин. Граничні і внутрішні точки. Замкнені і відкриті множини.

### *Жорданові виключення*

Заміна залежної змінної незалежною за допомогою алгебраїчних перетворень. Таблиця жорданових виключень. Виведення правил жорданових виключень. Використання жорданових виключень для обернення матриць, а також для вирішення системи лінійних рівнянь при $n = m$ та $n>m$. Визначення характеру квадратичної форми. Визначення характеру матриці, або критерій Сільвестра.

### *Безумовна мінімізація функцій*

Аксіоматика та формулювання задачі безумовної мінімізації функції. Необхідні умови локального мінімуму. Достатні умови локального мінімуму. Методи розв'язання задач пошуку безумовного мінімуму. Класичні та прямі методи мінімізації. Метод Ейлера. Єдність рішення строго опуклої функції. Прямі методи мінімізації. Одновимірна пошукова мінімізація. Метод дихотомії. Багатовимірна пошукова мінімізація. Метод найшвидшого спуску. Метод Н'ютона. Метод по координатного спуску.

### *Мінімізація функцій при обмеженнях у вигляді рівнянь*

Формулювання задачі мінімізації функцій при обмеженнях у вигляді рівностей. Розбиття змінних задачі на залежні та незалежні. Метод підстановки. Необхідні умови локального мінімуму. Методи розв'язання задачі мінімізації при обмеженнях у вигляді рівностей. Метод Якобі. Метод невизначених множників Лагранжа. Достатні умови локального мінімуму.

***Мінімізація функцій при двобічних обмеженнях змінних***

Формулювання задачі. Необхідні умови локального мінімуму. Перша група достатніх умов. Друга група достатніх умов. Диференціальний алгоритм. Можливі порушення необхідних умов. Вибір напрямку руху. Вибір розміру кроку.

***Загальна задача математичного програмування***

Формулювання задачі. Необхідні та достатні умови локального мінімуму. Диференціальний алгоритм. Таблиця диференціального алгоритму.

***Задача лінійного програмування***

Формулювання задачі. Властивості задачі. Пошук опорного рішення. Пошук допустимого опорного рішення. Пошук оптимального рішення. Особливості розв'язання задачі лінійного програмування.

## ЛІТЕРАТУРНІ ТА ЕЛЕКТРОНІ ДЖЕРЕЛА

*Навчальні посібники* для вивчення дисципліни та виконання контрольної роботи за програмою курсу:


- Самойленко, М. І. Математичне програмування [Текст]: навчальний посібник. – Х.: Основа, 2002. – 424 с.
- Минимизация функций с применением микро- и мини-ЭВМ. Сборник задач и упражнений [Текст]: учебное пособие / под общ. ред. А. Г. Евдокимова и Н. И. Самойленка. – Х.: «Основа», 1993. – 256 с.


*Електронний підручник* для самостійного вивчення дисципліни, практикуму, самотестування та виконання контрольної роботи за програмою курсу:


- Самойленко, М. І. Математичне програмування [Електронний ресурс]: навчальний посібник – Х.: ХНАМГ, 2008.

## ЗАГАЛЬНІ ВКАЗІВКИ, ПРАВИЛА ВИБОРУ ЗАВДАННЯ ТА ОФОРМЛЕННЯ КОНТРОЛЬНОЇ РОБОТИ

### *Загальні вказівки до виконання контрольної роботи*

Контрольна робота виконується за індивідуальним завданням, що охоплює різні розділи курсу. На стор. 8 – 39 стисло наведено основні теоретичні відомості з курсу, що безпосередньо стосуються завдань контрольної роботи, та розглянуто методику розв'язання типових задач, з яких формується індивідуальне завдання до контрольної роботи. Індивідуальні завдання мають 30 варіантів. Кожний студент повинний виконати завдання одного з варіантів і оформити їх у вигляді контрольної роботи. Зміст всіх варіантів наведено на стор. 40 – 62. В кінцевій частині методичних вказівок (стор. 63 – 69) зібрані додатки, що містять довідкову інформацію до виконання та оформлення контрольної роботи.

### *Правила оформлення контрольної роботи*

При виконанні контрольної роботи необхідно строго дотримуватися нижче наведених правил.

1. Контрольна робота виконується в окремому учнівському зошиті.
2. Титульна сторінка контрольної роботи оформляється за зразком, що наведений у Додатку С.
3. Перед вирішенням кожної задачі треба навести її умови.
4. Послідовність вирішення задач викладати докладно й акуратно.
5. Контрольна робота, що виконана не за своїм варіантом, не зараховується.

### *Вказівки до вибору варіанта*

Варіант контрольної роботи кожним студентом вибирається відповідно до номера його залікової книжки. Для визначення варіанта необхідно число, що утворене двома останніми цифрами номера залікової книжки, розділити на 30. При цьому залишок визначить варіант контрольної роботи. Наприклад: номеру залікової книжки 99375 відповідає варіант **15** (75 : 30 = 2 і залишок 15) ; номеру 99107 – варіант **7** (07 : 30 = 0 і залишок 7). При одержанні нульового залишку треба вибрати варіант 30.

# ВСТУП

Використання математичних методів в діяльності менеджерів дозволяє вирішувати оптимальним способом багато економічних, фінансових та організаційних задач. Прикладами таких задач, що наочно ілюструють корисність і необхідність знання курсу “Математичне програмування ”, можуть бути наступні задачі (надаються в змістовній формі):

- одержання максимального випуску продукції або максимального прибутку при заданих витратах часу або матеріальних та трудових ресурсах;
- забезпечення планових показників підприємства при мінімальних фінансових витратах;
- досягнення максимально скороченого терміну виготовлення продукції, будівництва об’єкта, товарообігу, виробничого циклу і т.п. при існуючих обмеженнях на умови виробничого процесу:
- досягнення мінімальних витрат часу (фінансів, пробігу, палива і та ін.) при формуванні плану перевезень вантажу з декількох складів декільком замовникам (транспортна задача).

> У наведених прикладах максимальний вихід продукції, максимальний прибуток, мінімальні витрати, максимально скорочений термін – це є шукані *оптимуми* (максимуми або мінімуми).

В математиці максимум та мінімум мають ще інший термін – *екстремум*, а задачі пошуку екстремуму називають *екстремальними задачами*.

> У наведених прикладах умови, при яких досягаються оптимуми, мають назву *оптимальне рішення.*

У практиці інженерів-економістів оптимальне рішення прийнято називати *оптимальним планом*.

Таким чином, *математичне програмування* являє собою математичну дисципліну, яка досліджує екстремальні задачі і розробляє методи їх вирішення.

> У загальному вигляді математична постановка екстремальної задачі полягає у визначенні найбільшого (максимального) або найменшого (мінімального) значення *цільової функції* $y(x_1, x_2, ..., x_n)$ за умови $f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i$, $(i = \overline{1, m})$, де $y$ та $f_i$ – функції, що задані, а $b_i$ – деякі дійсні числа.

У залежності від властивостей функцій $y$ та $f_i$ математичне програмування можна поділити на декілька самостійних дисциплін, які вивчають та розробляють методи вирішення окремих класів задач.

Перед усім, задачі математичного програмування поділяються на задачі *лінійного* та *нелінійного програмування.* При цьому, якщо усі функції $y$ та $f_i$ – лінійні, то відповідна задача є задачею лінійного програмування. Якщо хоча би одна з них – нелінійна, то відповідна задача є задачею нелінійного програмування.

Найбільш вивченим розділом математичного програмування є лінійне програмування. Для вирішення задач лінійного програмування розроблені декілька ефективних методів, алгоритмів та програм.

Серед задач нелінійного програмування найбільш глибоко вивчені задачі *опуклого програмування.* У цих задачах функція *y* являє собою *опуклу* (при пошуку мінімуму) або *угнуту* (при пошуку максимуму) функцію, що задана на *опуклій* (угнутій) *замкненій множині.*

В свою чергу, серед задач опуклого програмування більш дослідженими є задачі *квадратичного програмування.* В задачах квадратичного програмування функція *y* являє собою квадратичну функцію, а умови $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le b_i$, $(i = \overline{1, m})$ – систему лінійних рівнянь або нерівностей.

Окремими класами задач математичного програмування є задачі *цілочислового, параметричного, дробово-лінійного* та *геометричного програмування.*

В задачах цілочислового програмування змінні можуть приймати тільки цілочислові значення.

В задачах параметричного програмування цільова функція *y* або функції $f_i$, або усі разом залежать від деякого параметра.

В задачах дробово-лінійного програмування цільова функція являє собою відношення двох лінійних функцій, а функції, що визначають область можливих значень змінних, також являють собою лінійні функції.
В задачах геометричного програмування функція *y* являє собою позивом, а область визначення змінних обмежується тільки позитивними значеннями.

Виділяють окремі класи задач *стохастичного* та *динамічного програмування.*

Якщо у цільовій функції або функціях, що визначають область можливих змін змінних, присутні випадкові величини, то така задача належить до класу задач стохастичного програмування.

Задача, у якій процес пошуку рішення є багатоетапним, належить до класу задач динамічного програмування.

Для фахівців спеціальностей економіки та менеджменту найбільш вагомими являються задачі лінійного програмування, а також деякі окремі випадки загальних задач математичного та геометричного програмування.

В курсі «Математичне програмування», що пропонується студентам заочної форми навчання менеджерських спеціальностей найбільш ретельно розглядаються задачі лінійного програмування та безумовної мінімізації функції багатьох змінних, оскільки вони частіше зустрічаються на практиці. Крім того, особливості вирішення цих задач покладено в основу вирішення інших задач математичного програмування.

# ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТРИЧНОЇ АЛГЕБРИ

**Визначення 1.** Матрицею називають прямокутну таблицю елементів, що розташованих по рядках і стовпцях:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Якщо матриця містить *mn* елементів, що утворять *m* рядків і *n* стовпців, то говорять, що вона має розмір *m* на *n*, і записують це як $m \times n$.

**Визначення 2.** Матрицю розміру $n \times n$ називають *квадратною матрицею порядку n.*

Елемент, що знаходиться на перетині *i*-го рядка і *j*-го стовпця, позначається рядковою латинською літерою $a_{ij}$ з подвійною індексацією, набраною нежирним курсивним шрифтом. Перший індекс завжди відповідає порядковому номеру рядка, в якому розташовується елемент, а другий – порядковому номеру стовпця.

**Визначення 3.** Елементи квадратної матриці $a_{ij}$, що мають рівні індекси ($i = j$), називаються *діагональними,* а лінія, на якій розташовані діагональні елементи, – *головною діагоналлю.*

Окремим випадком матриці є *вектор*. Розрізняють *вектор-стовпець* і *вектор-рядок*. Вектор-стовпець має розмір $m \times 1$ і позначається рядковими латинськими літерами, набраними жирним шрифтом (не курсивом). Елементи вектора позначаються рядковими курсивними літерами з простою (одинарною) індексацією. Наприклад, $\mathrm{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix}$. Вектор-рядок має розмір $1 \times n$ і позначається також рядковими латинськими літерами, але з верхнім індексом «т». Наприклад, $c^{т} = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n]$.

**Визначення 4.** Дві матриці **A** і **B** називаються *рівними,* якщо вони мають однаковий розмір і $a_{ij} = b_{ij}$ для всіх *i* і *j*. Це означає, що рівні матриці збігаються по кожному елементу.

**Додавання матриць.** Якщо **A** і **B** – матриці одного розміру, їх можна скласти. При цьому утворюється нова матриця **C**=**A**+**B**, що має той же розмір, і для всіх *i* та *j* справедливо $\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$, тобто щоб одержати елементи матриці **C**, потрібно скласти відповідні елементи матриць **A** і **B**. Наприклад, якщо $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$ і $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, то $C = A + B = \begin{bmatrix} -1 & 6 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$.

**Множення матриці на скаляр.** Якщо $\lambda$ – скаляр, то добуток матриці на скаляр визначається як $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$ , тобто кожний елемент матриці **A** збільшується на $\lambda$. Наприклад, якщо $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$ і $\lambda = -5$, то $\lambda\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ 25 & -30 \end{bmatrix}$.

З правил додавання матриць і множення матриці на скаляр випливає $A - B = A + (-1)B = [a_{ij}] + [-b_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}]$ .

**Множення матриць.** Якщо матриця **A** має розмір *m* × *n*, а матриця **B** має розмір *n* × *p,* то добуток матриць **AB** визначається як нова матриця **D** розміру *m* × *p*, всі елементи якої обчислюються за формулою $\boxed{d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}}$ . Отже, елемент добутку матриць, що має індекси *ij,* визначається як сума попарних добутків елементів *i*–го рядка першої матриці на відповідні елементи *j*–го стовпця другої матриці. Для того, щоб це було можливо, необхідна рівність числа елементів у рядку першої матриці і числа елементів у стовпці другої матриці, тобто необхідна рівність числа *стовпців* першої матриці числу *рядків* другої матриці. Наприклад, якщо

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$ і $B = \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, то $D = A \cdot B = \begin{bmatrix} -6 & 12 \\ 39 & -24 \end{bmatrix}$.

**Визначення 5.** Квадратну матрицю $I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$ *n*-го порядку, на головній діагоналі якої розташовані одиниці, а на всіх інших місцях – нулі, називають *одиничною.*

**Транспонування.** Транспонування матриці А визначається як дія з перетворення матриці А в нову матрицю, рядками якої служать стовпці матриці А, а стовпцями – рядки матриці А. Транспонована матриця позначається так само, як вихідна, але з додаванням спеціального верхнього індексу «т». Наприклад, якщо $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$, то $A^{т} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$.

**Обернена матриця**. Математична операція обертання застосовується тільки для квадратних матриць.

**Визначення 6.** *Оберненою* називають таку квадратну матрицю, яка, будучи помноженою на початкову, дає одиничну матрицю.

Якщо початкова матриця позначається як **A**, то обернена – як $\mathbf{A}^{-1}$. Не кожна квадратна матриця має обернену, але якщо вона існує, то $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I}$.

**Лінійна функція та лінійна форма.** Функція вигляду $y(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a_0$ є лінійною функцією. Лінійна функція складається з двох частин: *лінійної форми* $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ і *вільного члена* $a_0$. У матричному вигляді лінійна функція записується таким чином:

$$y(x)=a^{\text{т}}x+a_0=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\dots\\a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & x_2 & \dots & x_n\end{bmatrix}+a_0\ ,$$

де $\mathbf{a}^{\text{о}}\mathbf{x}$ – лінійна форма як скалярний добуток вектора-рядка коефіцієнтів функції на вектор-стовпець змінних; $a_0$ – вільний член. Наприклад, лінійна функція $y(x_1,x_2)=-4x_1+2x_2-3$ в матричному вигляді записується таким чином: $y(x)=[-4\quad 2]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}-3$.

**Квадратична функція та квадратична форма.** Функція вигляду $y(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_ix_j+\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+a_0$ *є квадратичною функцією*. Квадратична функція складається з двох частин: *квадратичної форми* $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_ix_j$ і лінійної функції $\sum_{i=1}^{n}a_ix_i+a_0$. У матричному вигляді квадратична функція записується таким чином:

$$y(x)=\frac{1}{2}x^{\text{т}}A\,x+a^{\text{т}}x+a_0\ ,$$

де $\frac{1}{2}x^{\text{т}}A\,x$ – квадратична форма як скалярний добуток константи $\frac{1}{2}$, вектора-рядка змінних $x^{\text{т}}$, симетричної матриці коефіцієнтів при квадратичних членах $\mathbf{A}$ розмірності ($n \times n$) і вектора-стовпця $\mathbf{x}$; $(a^{\text{т}}x+a_0)$ – лінійна функція.

Кожний діагональний елемент $a_{ii}$ матриці **А** дорівнює відповідному подвоєному коефіцієнту $b_{ii}$ квадратичної функції, а інші елементи матриці **А** в точності дорівнюють відповідним коефіцієнтам функції: $a_{ij}=b_{ij}$. Наприклад, квадратична функція $y(x_1,x_2)=x_1^2+5x_2^2-3x_1x_2-3x_1+5$ в матричному виді може бути записана як

$$y(x)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}x_1 & x_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2\\-2 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}+5.$$

**Визначники.** Будь-якій квадратній матриці **А** відповідає деяке число, що називається *визначником* або *детермінантом* і позначається det **А** або $|\mathbf{A}|$.

Детермінант матриці обчислюється підсумовуванням визначених добутків елементів матриці. Так, детермінант матриці другого порядку, тобто матриці розміру (2×2), визначається таким чином: $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. Детермінант матриці третього порядку визначається як

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\a_{21} & a_{22} & a_{21}\\a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}-\\-a_{13}a_{22}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}. \qquad (1)$$

Визначник матриці першого порядку дорівнює єдиному елементу матриці $|a_{11}|=a_{11}$.

У загальному випадку детермінант матриці **A** $n$-го порядку визначається за формулою $\boxed{|A| = \sum \left(\pm a_{1i} a_{2j} \ldots a_{nr}\right)}$ , де сума береться за всіма перестановками других індексів співмножників, причому зі знаком плюс беруться члени з парними перестановками, а зі знаком мінус – члени з непарними перестановками.

## ЖОРДАНОВІ ВИКЛЮЧЕННЯ

*Жорданові виключення* – це метод, що у системі лінійних форм робить транспозицію (взаємну заміну) будь-якої залежної змінної $s_k$ і будь-якої незалежної $t_r$ без яких-небудь попередніх алгебраїчних перетворень. Для виконання жорданових виключень використовуються спеціальні таблиці, що називаються таблицями жорданових виключень. Ці таблиці дозволяють у процесі транспозиції змінних подавати в зручній формі як вихідну, так і результуючу системи лінійних форм. Подамо систему лінійних форм (2) у матричному вигляді:

$$s_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} t_j \ , \quad i = \overline{1,m}, \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \cdots \\ s_k \\ \cdots \\ s_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} & \cdots & a_{2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kr} & \cdots & a_{kp} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \cdots \\ t_r \\ \cdots \\ t_p \end{bmatrix}.$$

Таблиці жорданових виключень нагадують матричне надання системи лінійних форм. Так, початкова таблиця має вигляд:

| | $t_1$ | $t_2$ | ... | $t_r$ | ... | $t_p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ = | $a_{11}$ | $a_{12}$ | ... | $a_{1r}$ | ... | $a_{1p}$ |
| $s_2$ = | $a_{21}$ | $a_{22}$ | ... | $a_{2r}$ | ... | $a_{2p}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $s_k$ = | $a_{k1}$ | $a_{k2}$ | ... | $a_{kr}$ | ... | $a_{kp}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| $s_m$ = | $a_{m1}$ | $a_{m2}$ | ... | $a_{mr}$ | ... | $a_{mp}$ |

Елемент таблиці $a_{kr}$ називати *головним,* або *розв'язуючим* елементом; $k$-й рядок матриці – *направляючим,* або *розв'язуючим* рядком; $r$-й стовпець – *направляючим,* або *розв'язуючим* стовпцем.

Результуюча таблиця жорданових виключень набуває вигляду:

| | $t_1$ | $t_2$ | ... | $t_r^{\text{ðåç}}$ | ... | $t_p$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_1$ = | $b_{11}$ | $b_{12}$ | ... | $b_{1r}$ | ... | $b_{1p}$ |
| $s_2$ = | $b_{21}$ | $b_{22}$ | ... | $b_{2r}$ | ... | $b_{2p}$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $s_k^{ðåç} =$ | $b_{k1}$ | $b_{k2}$ | $\dots$ | $b_{kr}$ | $\dots$ | $b_{kp}$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $s_m =$ | $b_{m1}$ | $b_{m2}$ | $\dots$ | $b_{mr}$ | $\dots$ | $b_{mp}$ |

У результуючій таблиці в якості залежної змінної $s_k^{\text{рез}}$ виступає та змінна, яка в початковій таблиці відповідала незалежній змінній $t_r$, а в якості незалежної $t_r^{\text{рез}}$ – $s_k$. Інші змінні в результуючій таблиці співпадають з відповідними змінними початкової таблиці.

***Правила жорданових виключень:***

***Правило 1***. Головний елемент нової (результуючої) таблиці дорівнює оберненому головному елементові старої таблиці:

$$b_{kr} = \frac{1}{a_{kr}}, \quad k \in \{i\}_1^m, \quad r \in \{j\}_1^p \ . \tag{3}$$

***Правило 2.*** Нові елементи направляючого рядка дорівнюють відповідним старим, узятим із зворотним знаком і поділеним на головний елемент:

$$b_{kj} = -\frac{a_{kj}}{a_{kr}}, \quad j = \overline{1,p}, \quad j \neq r \ . \tag{4}$$

***Правило 3.***. Нові елементи направляючого стовпця дорівнюють відповідним старим, поділеним на головний елемент:

$$b_{ir} = \frac{a_{ir}}{a_{kr}}, \quad i = \overline{1,m}, \quad i \neq k \ . \tag{5}$$

***Правило 4.***. Інші елементи нової таблиці, що не розташовані на направляючому рядку або стовпці, визначаються за схемою «чотирикутника»:

$$b_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{ir}a_{kj}}{a_{kr}}, \quad i = \overline{1,m}, i \neq k, \quad j = \overline{1,p}, j \neq r \ . \tag{6}$$

***Обертання матриць за допомогою жорданових виключень.*** Якщо матрицю **A** подати як матрицю коефіцієнтів в системі лінійних форм:

$$s = A\,t \ , \tag{7}$$

де **A** – *невироджена квадратна* матриця, тобто визначник матриці не дорівнює нулю і число залежних перемінних дорівнює числу незалежних змінних, то можна помітити, що множення обох частин рівності (7) на обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ *«зліва»* приводить до виразу:

$$t = A^{-1} s \ . \tag{8}$$

Тобто транспозиція векторів залежних і незалежних змінних у початковій системі лінійних форм (7) автоматично перетворює матрицю коефіцієнтів **A** в обернену $\mathbf{A}^{-1}$. Для транспозиції векторів треба здійснити *n* кроків жорданових виключень, де *n* – порядок матриці.

**Задача 1.** За допомогою жорданових виключень знайти матрицю $\mathbf{A}^{-1}$, що буде оберненою відносно матриці $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

**Розв'язання.** Перш за все, обчислимо визначник наданої матриці. Згідно з формулою (1) $\det \mathbf{A} = 7$. Оскільки $\det \mathbf{A} \neq 0$, то обернена матриця існує. Для вирішення задачі надамо матрицю **A** як матрицю коефіцієнтів системи лінійних форм $\mathrm{s} = \mathrm{At}$:

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Перетворимо (9) у систему $\mathbf{t} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{s}$ з шуканою оберненою матрицею $\mathbf{A}^{-1}$. Для цього в системі (9) здійснимо послідовно три кроки жорданових виключень (у загальному випадку *n* кроків), щоразу обираючи як головній елемент один із діагональних, і тільки діагональних. Мета жорданових виключень – замінити кожну залежну змінну $s_i$ незалежної $t_i$, $(i = \overline{1,3})$. Послідовність замін несуттєва.

Перший крок, якщо $a_{11} \neq 0$, здійснюється за схемою:

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{21} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} t_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{21} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Якщо $a_{11} \neq 0$, то в якості першого головного елементу беруть інший діагональний елемент. Розкриємо (10) поступово – по мірі використання правил жорданових виключень:

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} t_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{21} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{21} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & b_{22} & b_{21} \\ \frac{1}{2} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix}.$$

Аналогічно проводяться ще два кроки, але в якості головних елементів вже беруться інші діагональні елементи.

Після проведення трьох зазначених кроків жорданових виключень одержимо нову систему лінійних форм в якій матриця коефіцієнтів являє собою шукану матрицю, обернену щодо заданої.

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{2}{7} \\ -\frac{3}{7} & \frac{1}{7} & \frac{6}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix},$$

*Примітка.* При пошуку оберненої матриці зовсім необов'язково в наведену схему кожний раз включати вектори змінних.

Для перевірки правильності знайденого рішення необхідно перемножити вихідну і шукану матриці:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{bmatrix}2&1&0\\0&3&1\\1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3}{7}&-\frac{1}{7}&\frac{1}{7}\\\frac{1}{7}&\frac{2}{7}&-\frac{2}{7}\\-\frac{3}{7}&\frac{1}{7}&\frac{6}{7}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I_3 .$$

Оскільки добутком цих матриць є одинична матриця, знайдена матриця згідно з визначенням є оберненою, тобто рішення знайдено вірно.

# БЕЗУМОВНА МІНІМІЗАЦІЯ

**Визначення 7.** Точка $x^*\in R^n$ називається точкою локального мінімуму функції, якщо існує окіл $\varepsilon(x^*)$ точки $x^*$ такий, що при всіх $x\in\varepsilon(x^*)$ виконується нерівність $y(x^*)\le y(x)$, де **x** – *n*-вимірний вектор змінних задачі. $\varepsilon(x^*)$

Задача пошуку безумовного глобального мінімуму формулюється таким чином: знайти мінімум функції $y(x)$, заданої в *n*-вимірному евклідовому просторі $\mathbf{R}^n$. Аналітичний запис цієї задачі має вигляд:

$$y(x)\rightarrow \min_{x\in V\subseteq R^n} . \qquad (11)$$

де **V** – область існування функції $y(x)$.

Задача пошуку безумовного локального мінімуму формулюється таким чином: знайти мінімум функції $y(x)$ в ε-околі деякої точки $\mathbf{x}^{(\circ)}\in\mathbf{V}$. Аналітичний запис цієї задачі має вигляд:

$$y(x)\rightarrow \min_{x\in\varepsilon\left(x^{(\circ)}\right)\subset V\subseteq R^n} , \qquad (12)$$

де $\varepsilon(x^{(\circ)})$ – ε-окіл деякої точки $\mathbf{x}^{(o)}$.

**Необхідна умова локального екстремуму –** в точці локального мінімуму градієнт функції дорівнює нулю:

$$\boxed{\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^* = 0}. \qquad (13)$$

**Визначення 8.** Точка, для якої виконується рівність $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^* = 0$ називається *стаціонарною* точкою функції $y(x)$.

**Визначення 9.** Матрицю, що складається з других частинних і змішаних похідних функції цілі $y(\mathbf{\tilde{o}})$, називають матрицею Гессе або гессіаном.

$$H=\begin{bmatrix}\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1\partial x_n}\\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2\partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2\partial x_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_n\partial x_1} & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2}\end{bmatrix}$$

**Достатня умова** для точки локального мінімуму полягає (при виконанні необхідних) у додатній визначеності матриці Гессе, яка обчислюється в цій точці.

В інженерній практиці характер квадратичної форми визначають за допомогою *критерію Сільвестра*.

**Визначення 10.** Головні визначники матриць – це визначники матриць, що утворюються уздовж головної діагоналі (із верхнього лівого кута – в правий нижній).

Для матриці $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$ головними визначниками є:

$$\Delta_1=\det[a_{11}]\ ;\quad \Delta_2=\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\ ;\quad \dots\quad ;\ \Delta_n=\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

**Критерій Сільвестра констатує:**

- матриця **А** позитивно визначена в тому і тільки в тому випадку, якщо всі головні визначники матриці додатні;
- матриця **А** від'ємно визначена в тому і тільки в тому випадку, якщо всі непарні головні визначники матриці від'ємні, а всі парні – додатні;

**Метод Ейлера** заснований на необхідних і достатніх умовах існування екстремуму. Метод дозволяє виявити всі екстремальні точки цільової функції (як локальні мінімуми, так і локальні максимуми) і таким чином дає загальне уявлення про поведінку гіперповерхні функції $y(x)$ в гіперпросторі $R^n$.

Алгоритм методу полягає в наступному.

- Беруть частинні похідні функції $y(x)$ по кожній змінній $x_i$ і відповідно до необхідних умов для точки локального екстремуму дорівнюють нулю $\frac{\partial y}{\partial x_i}=0,\quad i=\overline{1,n}$.
- Розв'язують будь-яким відомим методом одержану систему, що складається у загальному випадку з *n* нелінійних рівнянь. Корені системи, якщо вони існують, являють собою стаціонарні точки функції $y(x)$, оскільки в них усі частинні похідні рівні нулю.
- Беруть усі другі частинні й змішані похідні від функції $y(x)$ й обчислюють їх у кожній стаціонарній точці. За обчисленими похідними складають матрицю Гессе для кожної стаціонарної точки.
- Досліджують характер отриманих гессіанів. За характером матриці Гессе визначають вид відповідних екстремальних точок:
  - додатна визначеність матриці відповідає точці локального мінімуму;
  - від'ємна – точці локального максимуму;
  - напіввизначеність залишає стаціонарну точку для додаткових досліджень;
  - невизначеність вилучає точку із подальшого розгляду.
- Обчислюють значення функції $y(x)$ в кожному локальному мінімумі, якщо вирішується задача мінімізації, або в кожному локальному максимумі – якщо максимізації. Потім шляхом порівняння обчислених значень знаходять абсолютний екстремум.

Розглянемо метод Ейлера на конкретному прикладі.

**Задача 2.** Дослідити на наявність екстремумів функцію двох змінних:

$$y(x) = 2x_1^3 + x_2^3 - 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 - 15x_1 \qquad (14)$$

і визначити глобальні екстремуми (мінімум і максимум) функції за умови їхньої наявності.

**Розв'язання.** Взявши частинні похідні функції (14) по змінних $x_1$ і $x_2$ і прирівнявши згідно з (13) нулю, одержимо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x_1} = 6x_1^2 - 6x_1 x_2 + 3x_2^2 - 15 = 0; & (15) \\ \dfrac{\partial y}{\partial x_2} = 3x_2^2 - 3x_1^2 + 6x_1 x_2 = 0. & (16) \end{cases}$$

Знайдемо корені цієї системи. Поділимо обидва рівняння (15) і (16) на 3 і віднімемо з першого друге, маємо

$$3x_1^2 - 4x_1 x_2 - 5 = 0 \ .$$

Визначаючи $x_2$ через $x_1$

$$x_2 = \frac{3x_1^2 - 5}{4x_1} \ , \qquad (17)$$

підставляючи отриманий вираз в (16) із зауваженням, що $\tilde{o}_1 \neq 0$, і здійснюючи ряд спрощень, одержуємо

$$17x_1^4 - 70x_1^2 + 25 = 0 \ . \qquad (18)$$

У результаті розв'язання біквадратного рівняння (18) маємо чотири корені: $x_{1A} = -0{,}6285;\ x_{1B} = 0{,}6285;\ x_{1C} = -1{,}9294;\ x_{1D} = 1{,}9294$. За допомогою співвідношення (17) знаходимо відповідні координати для другої змінної: $x_{2A} = 1{,}5175;\ x_{2B} = -1{,}5175;\ x_{2C} = -0{,}7992;\ x_{2D} = 0{,}7992$.

Оскільки всі корені після їх підстановки в початкову систему рівнянь (15) – (16) перетворюють її в систему тотожностей, то сторонніх коренів немає. Отже, функція має чотири стаціонарні точки:

$$x_A^{\circ} = \begin{bmatrix} -0{,}6285 \\ 1{,}5175 \end{bmatrix};\ x_B^{\circ} = \begin{bmatrix} 0{,}6285 \\ -1{,}5175 \end{bmatrix};\ x_C^{\circ} = \begin{bmatrix} -1{,}9294 \\ -0{,}7992 \end{bmatrix};\ x_D^{\circ} = \begin{bmatrix} 1{,}9294 \\ 0{,}7992 \end{bmatrix} .$$

Для визначення виду стаціонарних точок сформуємо чотири матриці Гессе. Для цього спочатку візьмемо всі другі частинні і змішані похідні функції (14):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} = 12x_1 - 6x_2 \ ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} = 6x_1 + 6x_2 \ ; \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} = -6x_1 + 6x_2 .$$

Потім обчислимо їх у кожній стаціонарній точці (див. табл. 1).

Таблиця 1

| $\frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}, \quad i,j=\overline{1,2}$ | Стаціонарна точка | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $\mathbf{x}_A^{\circ}$ | $\mathbf{x}_B^{\circ}$ | $\mathbf{x}_C^{\circ}$ | $\mathbf{x}_D^{\circ}$ |
| $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}$ | -16,647 | 16,647 | -18,3576 | 18,3576 |
| $\frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2}$ | 5,334 | -5,334 | -16,3716 | 16,3716 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1}$ | 12,876 | -12,876 | 6,7812 | -6,7812 |

Складемо матриці Гессе для кожної стаціонарної точки:

$$H_A = \begin{bmatrix} -16,647 & 12,876 \\ 12,876 & 5,334 \end{bmatrix}; \qquad H_B = \begin{bmatrix} -16,647 & -12,876 \\ -12,876 & 5,334 \end{bmatrix};$$

$$H_C = \begin{bmatrix} -18,3576 & 6,7812 \\ 6,7812 & -16,3716 \end{bmatrix}; \qquad H_D = \begin{bmatrix} 18,3576 & -6,7812 \\ -6,7812 & 16,3716 \end{bmatrix}.$$

Далі підрахуємо значення головних визначників одержаних гессіанів (див. табл. 2).

Таблиця 2

| Головний визначник $\Delta_i, \quad i = \overline{1,2}$ | Стаціонарна точка | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $x^{\circ}_A$ | $x^{\circ}_B$ | $x^{\circ}_C$ | $x^{\circ}_D$ |
| $\Delta_1$ | -16,647 | 16,647 | -18,3576 | 18,3576 |
| $\Delta_2$ | -254,5865 | -254,5865 | 254,5586 | 254,5586 |

З табл. 2 відповідно до критерію Сільвестра випливає, що стаціонарні точки $x^{\circ}_A$ і $x^{\circ}_B$ не є екстремальними, $\mathbf{\tilde{o}}^{\circ}_{D}$ – точка локального мінімуму, $\mathbf{\tilde{o}}^{\circ}_{Ñ}$ – точка локального максимуму. Оскільки функція має один явний мінімум і один явний максимум, то вони одночасно є і глобальними екстремумами.

Отже, рішеннями задачі 2 є дві точки: точка мінімуму $x^{**T}_D = [1,9294 \quad 0,7992]$, в якій $\acute{o}_{\min} = -19,293$; і точка максимуму $x^{**T}_C = [-1,9294 \quad -0,7992]$, в якій $\acute{o}_{\max} = 19,293$.

## ПРЯМІ МЕТОДИ ПОШУКУ ЕКСТРЕМУМУ

Незважаючи на те, що класичні методи, в тому числі і метод Ейлера, розв’язання задач безумовної оптимізації дозволяють знаходити точне рішення, причому абсолютне, вони, проте, в інженерній практиці поступово витісняються прямими методами. Одна з причин такого становища – відсутність універсального методу розв’язання систем нелінійних рівнянь. Інша, більш серйозна – складність машинної реалізації класичних методів, пов'язана з взяттям табличних похідних.

Зауважимо, що прямі методи оптимізації називають також пошуковими, покроковими, ітераційними, наближеними, послідовними, некласичними, чисельними.

Розв’язання екстремальних задач прямими методами являє собою ітераційний процес, що припускає цілеспрямований рух по гіперповерхні функції цілі до точки локального екстремуму.

Рух до точки екстремуму починають від деякої точки $x_0 \in R^n$, яку називають *точкою початкового наближення*. Така точка повинна бути відома до початку процесу оптимізації. Вона може бути задана умовою задачі або вибиратися з розумних міркувань – якнайближче до передбачуваного місця знаходження екстремуму. Якщо апріорна інформація про знаходження локального екстремуму відсутня і не можна зробити розумних припущень про її місцезнаходження, то як початкову точку наближення доцільно вибрати початок системи координат. У цьому випадку спростяться обчислювальні процедури на першому кроці руху. Однак завжди слід пам'ятати, що початкова точка наближення повинна належати області існування функції, тобто $x_0 \in V \subseteq R^n$.

На кожному наступному ($k$+1)-м кроці оптимізації за деякою (заздалегідь визначеною) стратегією обчислюється нова точка наближення $\mathbf{x}^{(k+1)}$, що розташовується ближче до шуканого екстремуму, ніж попередня. Іншими словами, при пошуку локального мінімуму значення функції в новій точці наближення повинно бути менше, ніж у попередньої

$$y\left(x^{(k+1)}\right) < y\left(x^{(k)}\right) , \tag{19}$$

У більшості прямих методів безумовної оптимізації наступна точка наближення $x^{(k+1)}$ зв'язана рекурентним співвідношенням із попередньою $x^{(k)}$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda^{(k)} \Delta x^{(k)} , \tag{20}$$

де $\Delta x^{(k)}$ – направляючий вектор, що визначає напрямок руху; $\lambda^{(k)}$ – скалярна величина, що регулює розмір кроку у напрямку $\Delta x^{(k)}$; $k = 0, 1, 2, \dots$

Побудова послідовного ланцюга точок наближення (20), таких що виконується умова (19) при пошуку мінімуму, називається релаксійним процесом, а сама послідовність – оптимізуючою (мінімізуючою).

Релаксійний процес називається збіжним, якщо

$$\lim_{k \to \infty} x^{(k)} = x^* .$$

Збіжний релаксійний процес не гарантує точного відшукання екстремуму, однак дозволяє за кінцеве число кроків (ітерацій) одержати рішення, як завгодно мало відмінне від екстремального.

## Метод по координатного спуску

Метод покоординатного спуску, відомий також як метод Гаусса-Зейделя, має різку відмінність від решти методів.

Метод по координатного спуску уявляє собою ітераційну процедуру. Кожна ітерація складається з $n$ кроків (за числом змінних задачі). Як і у всіх методах безумовної оптимізації задаються або вибираються точка початкового наближення і точність обчислення. Однак, на відміну від інших методів, на кожному $k$-му кроці змінюється тільки одна змінна $x_r$, за якою порушена необхідна умова (19) із точністю до $\varepsilon$:

$$\left| \left( \frac{\partial y}{\partial x_r} \right)^* \right| \le \varepsilon . \tag{21}$$

Рух до екстремуму по гіперповерхні функції цілі на кожному кроці здійснюється паралельно осі змінної $x_r$. Рис. 1 демонструє стратегію наближення до точки екстремуму функції двох змінних методом по координатного спуску.

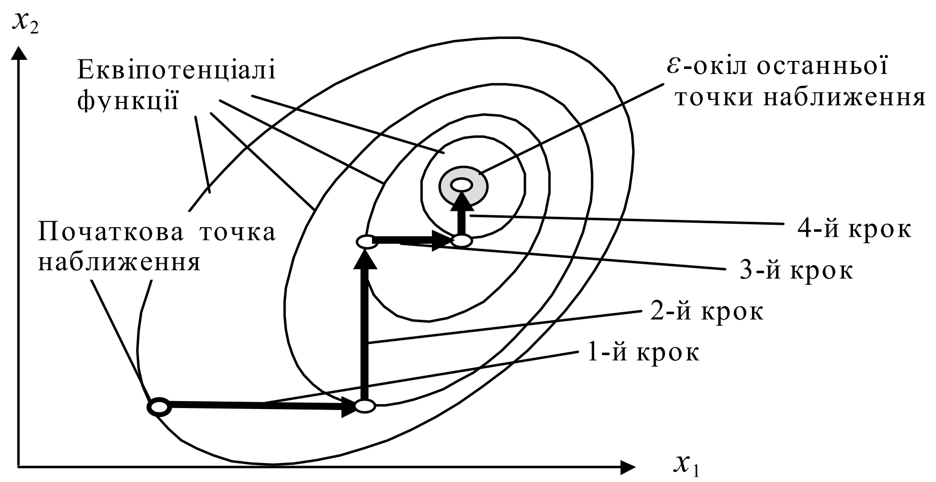



**Рис. 1 –** Стратегія оптимізації методом по координатного спуску

Рекурентне співвідношення (20) можна подати у вигляді

$$x^{(k+1)^T} = x^{(k)^T} + \lambda^{(k)} \left[ 0 \ldots 0 \;\; \Delta x_r^{(k)} \;\; 0 \ldots 0 \right], \tag{22}$$

де направляючий вектор при пошуку мінімуму функції визначається як антиградієнт

$$\Delta x_r^{(k)} = -\left( \frac{\partial y}{\partial x_r} \right)^{(k)}; \tag{23}$$

а при пошуку максимуму – як градієнт

$$\Delta x_r^{(k)} = \left( \frac{\partial y}{\partial x_r} \right)^{(k)}; \tag{24}$$

Залежно від стратегії, застосовуваної при виборі змінної $x_r^{(k)}$, і методу мінімізації функції однієї змінної $y\left(\lambda^{(k)}\right)$ можна генерувати досить велику кількість модифікацій методу, які відрізняються за швидкістю збіжності.

Розглянемо метод по координатного спуску, що відрізняється найбільшою простотою організації обчислювального процесу. У цьому методі визначення довжини кроку в обраному напрямку здійснюється за формулою:

$$\lambda^{(k)} = \frac{1}{\left| \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x_r^2} \right)^{(k)} \right|}. \tag{25}$$

Остаточно основне рекурентне співвідношення розглянутої модифікації по координатного спуску при пошуку локального мінімуму і локального максимуму набуває відповідно вигляду:

$$\boxed{x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)} - \frac{\left( \frac{\partial y}{\partial x_r} \right)^{(k)}}{\left| \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x_r^2} \right)^{(k)} \right|}} \;; \qquad 26)$$

$$\boxed{x_r^{(k+1)} = x_r^{(k)} + \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_r}\right)^{(k)}}{\left|\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_r^2}\right)^{(k)}\right|}.} \qquad (27)$$

***Послідовність*** обчислювальних операцій при безумовній оптимізації методом по координатного спуску така:

*Перша ітерація.*

**1-й крок.** Обчислюємо значення функції в початковій точці наближення (для перевірки правильності руху до точки екстремуму) і перевіряємо виконання необхідної умови локального екстремуму (19) за змінною $x_1$. Якщо умови виконуються, переходимо до аналізу необхідних умов за наступною змінною $x_2$. При порушенні умов визначаємо нову точку наближення за рекурентною формулою (26) у випадку мінімізації або (27) у випадку максимізації.

**2-й крок.** Обчислюємо значення функції в новій точці наближення і порівнюємо з попереднім. Якщо функція не поліпшується, шукаємо й усуваємо помилку першого кроку. Потім повторюємо п.1 для змінної $x_2$.

І так далі, поки не буде виконаний повний цикл із $n$ кроків.

*Друга ітерація.*

Повторюємо процедуру першої ітерації щодо останньої точки наближення.

І так далі, поки не будуть виконані необхідні умови по всім змінним одночасно.

**Задача 3.** Продемонструємо роботу методу покоординатного спуску при пошуку максимуму функції (14) $y = 2x_1^3 + x_2^3 - 3x_1^2 x_2 + 3x_1 x_2^2 - 15x_1$ при початковому наближенні $x^{(0)^T} = [-1{,}8 \quad -1]$ і точності обчислення $\varepsilon = 0{,}01$.

***Розв'язання.***

*1 - ша ітерація. 1-й крок.* Змінюється тільки змінна $x_1$. У точці $x^{(0)^T} = [-1{,}8 \quad -1]$ значення функції цілі $y^{(0)} = 18{,}0976$, а частинна похідна $\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(0)} = -3{,}36$. Необхідна умова локального максимуму (5.48) за даною змінною не виконується: $\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(0)}\right| = 3{,}36 > 0{,}01 = \varepsilon$. Використовуючи рекурентне співвідношення (27), одержуємо для змінної $x_1$ нове значення

$$x_1^{(1)} = x_1^{(0)} + \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(0)}}{\left|\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^{(0)}\right|} = -1{,}8 + \frac{-3{,}36}{|-15{,}6|} = -2{,}0154 \cdot$$

У новій точці наближення $x^{(1)^T} = [-2{,}0154 \quad -1]$ значення функції $y^{(1)} = 18{,}9978 > 18{,}0976 = y^{(0)}$, тобто має місце поліпшення функції.

Переходимо до 2-го кроку.

*1-ша ітерація. 2-й крок.*. У новій точці $x^{(1)^T} = [-2{,}0154 \quad -1]$ змінюється тільки змінна $x_2$. Оскільки частинна похідна $\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(1)} = 3{,}0931$, то необхідна умова локального максимуму за даною змінною не виконується: $\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(1)}\right| = 3{,}36 > 0{,}01 = \varepsilon$.

Використовуючи рекурентне співвідношення (27), одержуємо для змінної $x_2$ нове значення

$$x_2^{(2)} = x_2^{(1)} + \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(1)}}{\left|\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}\right)^{(1)}\right|} = -1 + \frac{3{,}0931}{|-18{,}0924|} = -0{,}829 .$$

У новій точці наближення $x^{(2)^T} = [-2{,}0154 \quad -0{,}829]$ значення функції $y^{(2)} = 19{,}2354 > 18{,}9978 = y^{(1)}$, тобто має місце поліпшення функції.

Переходимо до другої ітерації (третьому кроку).

*2-га ітерація. 3-й крок.*

$$\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(2)}\right| = 1{,}4081 > 0{,}01 \ ; \quad x_1^{(3)} = -2{,}0154 + \frac{1{,}4081}{|-19{,}2108|} = -1{,}9421 ;$$

$$x^{(3)^T} = [-1{,}9421 \quad -0{,}829]; \qquad y^{(3)} = 19{,}2878 > 19{,}2354 = y^{(2)} \ .$$

*2-га ітерація. 4-й крок.*

$$\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(3)}\right| = 0{,}4064 > 0{,}01 \ ; \quad x_2^{(4)} = -0{,}829 + \frac{0{,}4064}{|-16{,}6266|} = -0{,}8046 ;$$

$$x^{(4)^T} = [-1{,}9421 \quad -0{,}8046]; \qquad y^{(4)} = 19{,}2929 > 19{,}2878 = y^{(3)} .$$

*3-я ітерація. 5-й крок.*

$$\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(4)}\right| = 0{,}1969 > 0{,}01 \ ; \quad x_1^{(5)} = -1{,}9421 + \frac{0{,}1969}{|-18{,}4776|} = -1{,}9314 ;$$

$$x^{(5)^T} = [-1{,}9314 \quad -0{,}8046]; \qquad y^{(5)} = 19{,}2929 > 19{,}2938 = y^{(4)} .$$

*3-я ітерація. 6-й крок.*

$$\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(5)}\right| = 0{,}0752 > 0{,}01 \ ; \quad x_2^{(6)} = -0{,}8046 + \frac{0{,}0752}{|-16{,}416|} = -0{,}8 ;$$

$$x^{(6)^T} = [-1{,}9314 \quad -0{,}8]; \qquad y^{(6)} = 19{,}294 > 19{,}2938 = y^{(5)} .$$

*4-а ітерація. 7-й крок.*

$$\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)^{(6)}\right| = 0{,}0311 > 0{,}01 \ ; \quad x_1^{(7)} = -1{,}9314 + \frac{0{,}0311}{|-18{,}3768|} = -1{,}9297 ;$$

$$x^{(7)^T} = [-1{,}9297 \quad -0{,}8046] \ ; \qquad y^{(7)} = 19{,}29415 > 19{,}294 = y^{(6)} .$$

*4-а ітерація. 8-й крок.*

У новій точці наближення необхідна умова (19 виконується: $\left|\left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)^{(7)}\right| = 0,0086 < 0,01$. Тому переходимо до наступного кроку. Але оскільки функція має тільки дві змінні, то можна вважати, що екстремум уже досягнутий, тому що попередній крок робився в точку з нульової частинною похідною за першою змінною.

Задачу вирішено. Остання точка наближення із заданою точністю є локальним екстремумом $x^* = x^{(7)T} = [-1,9297 \quad -0,8]$. У цій точці функція приймає максимальне значення $y^{(7)} = 19,29415$.

# ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

## *Постановка задачі лінійного програмування*

Загальна задача лінійного програмування формулюється таким чином: *знайти оптимум лінійної функції $y(\mathbf{õ})$, якщо на змінні задачі накладені лінійні обмеження у вигляді рівностей і нерівностей.*. Аналітичний запис цієї задачі такий:

$$y(x) = c^{т}x + c_0 \to \underset{x \in \Omega \subset R^n}{\mathrm{opt}} \quad , \tag{28}$$

$$\Omega : \quad A_1 x + b_1 \le 0 \ ; \tag{29}$$

$$A_2 x + b_2 = 0 \ ; \tag{30}$$

$$\mathbf{\grave{A}}_3 \mathbf{x} + \mathbf{b}_3 \ge 0 \ ; \tag{31}$$

$$\mathbf{x} \ge 0 \ , \tag{32}$$

де $\mathbf{õ}$ – $n$-вимірний вектор дійсних змінних; $c$ – $n$-вимірний вектор коефіцієнтів функції цілі; $\tilde{n}_0$ – вільний член функції цілі; $A_1, A_2, A_3$ – матриці коефіцієнтів лінійних систем розмірності $m_1 \times n$, $m_2 \times n$, $m_3 \times n$ відповідно, $m_2 < n$; $b_1, b_2, b_3$ – вектори вільних членів обмежень розмірності $m_1 \times 1$, $m_2 \times 1$, $m_3 \times 1$ відповідно.

Окремі задачі лінійного програмування можуть не містити однієї або двох систем обмежень типу (29) – (32), однаково яких. Крім того, замість умови невід'ємності (32) може мати місце двостороння або одностороння обмеженість змінних.

Задачу, складену з (28), (29) і (32), називають *стандартною* задачею лінійного програмування.

*Канонічна*, або *основна* задача лінійного програмування має вигляд:

$$y(x) = c^{т}x + c_0 \to \max_{x \in \Omega \subset R^n} \quad , \tag{33}$$

$$\Omega : \quad Ax + b = 0 \ ; \tag{34}$$

$$x \ge 0 \, , \tag{35}$$

де $\mathbf{\grave{A}}$ – матриця коефіцієнтів розмірності $m \times n$, $m < n$; $\mathbf{b}$ – вектор вільних членів розмірності $m \times 1$.

Очевидно, що обмеження-нерівність т ипу "≤" можна перетворити на обмеження-рівність додаванням до його лівої частини додаткової невід'ємної змінної, а кожне обмеження-нерівність типу "≥" – в обмеження-рівність відніманням з його лівої частини додаткової невід’ємної змінної. Задачу мінімізації лінійної функції $y$ множенням останньої на $-1$ можна звести до задачі максимізації. Таким чином, задачу лінійної оптимізації (28) – (32) завжди можна перетворити на задачу (33) – (35) і навпаки.

### *Диференційний алгоритм вирішення задачі лінійного програмування*

Для збереження логічної послідовності навчального посібника оператор $\max$ у канонічній моделі (33) – (35) замінимо оператором $\min$. Тоді канонічна форма запису задачі лінійного програмування набуватиме вигляду:

$$y(x) = c^{T}x + c_0 \rightarrow \min_{x \in \Omega \subset R^n}, \tag{37}$$

$$\Omega: \quad Ax + b = 0 \ ; \tag{38}$$

$$x \geq 0, \tag{39}$$

Диференціальний алгоритм вирішення задачі лінійного програмування в загальному випадку складається з трьох етапів:

- 1-й етап – пошук опорного рішення;
- 2-й етап – пошук припустимого опорного рішення;
- 3-й етап – пошук оптимального опорного рішення.

Розглянемо послідовно всі три етапи.

**Пошук опорного рішення**

Пошук опорного рішення починається с подання математичної моделі задачі, точніше її складових частин (37) і (38) у вигляді початкової таблиці диференціального алгоритму табл. 3).

Таблиця 3

| | $x_1$ | … | $x_j$ | … | $x_n$ | <1> |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y =$ | $c_1$ | … | $c_j$ | … | $c_n$ | $c_0$ |
| $0 =$ | $a_{11}$ | … | $a_{1j}$ | … | $a_{1n}$ | $b_1$ |
| … | … | … | … | … | … | … |
| $0 =$ | $a_{i1}$ | … | $a_{ij}$ | … | $a_{in}$ | $b_i$ |
| … | … | … | … | … | … | … |
| $0 =$ | $a_{m1}$ | … | $a_{mj}$ | … | $a_{mn}$ | $b_m$ |

Елементи $a_{ij}$ в табл. 3 дорівнюють відповідним елементам матриці **A** в рівності (38), елементи $b_i$ – відповідним складовим вектора **b** в (38), елементи $c_j$ – відповідним складовим вектора **c** в (37), $c_0$ – вільному члену $c_0$ в (37). Табл. 3 відрізняється від таблиці жорданових виключень тільки наявністю другого рядка, що містить функцію $y(\mathbf{x})$.

Якщо до табл. 3 застосувати послідовно $m$ кроків жорданових виключень, то вона перетвориться на табл. 4. В якості головного елементу на кожному кроці можна застосовувати тільки елементи $a_{ij}$, но ні в якому разі елементи $c_j$. Кожний крок дозволяє перевести одну незалежну зміну $x_j$ в залежну.

Таблиця 4

| | $t_1$ | … | $t_j$ | … | $t_p$ | <1> |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y =$ | $\frac{\delta y}{\delta t_1}$ | … | $\frac{\delta y}{\delta t_j}$ | … | $\frac{\delta y}{\delta t_p}$ | $y_0$ |
| $s_1 =$ | $b_{11}$ | … | $b_{1j}$ | … | $b_{1p}$ | $\beta_1$ |
| … | … | … | … | … | … | … |
| $s_i =$ | $b_{i1}$ | … | $b_{ij}$ | … | $b_{ip}$ | $\beta_i$ |
| … | … | … | … | … | … | … |
| $s_m =$ | $b_{m1}$ | … | $b_{mj}$ | … | $b_{mp}$ | $\beta_m$ |

В табл. 4 елементи $\frac{\delta y}{\delta t_j}$ є умовні похідні цільової функції за незалежними змінними. Здійснюючи зворотне перетворення табл. 4 до математичної моделі, одержимо тепер таку задачу:

$$y(x) = \left[\frac{\delta y}{\delta t}\right]^{T} t + y_0 \to \min_{t \in \Omega} \quad , \tag{40}$$

$$\Omega: \quad s = Bt + \beta \quad ; \tag{41}$$

$$s, t \geq 0 \, , \tag{42}$$

Прирівнюючи всі незалежні змінні нулю, одержуємо значення залежних змінних $s_i = \beta_i$, і таким чином, одержуємо перше опорне рішення задачі, в якому рівно $p$ незалежних змінних дорівнюють нулю:

$$x^{(0)^T} = \left[\underbrace{0 \quad 0 \ldots 0}_{p} \quad \beta_1 \quad \beta_2 \ldots \beta_m\right] \quad . \tag{43}$$

***Пошук припустимого опорного рішення***

Вектор (43) в загальному випадку може містити як позитивні, так і від'ємні складові, тобто виконується вимога (41), а вимога (42) – ні. В цьому разі необхідно здійснити другий етап вирішення задачі, що приведе до припустимого опорного рішення, в якому не буде від'ємних складових.

Другий етап, як всі інші, складається з кроків жорданових виключень. Кожний крок дозволяє позбавитися принаймні від однієї від'ємної складової.

Вибір незалежної змінної для наступного кроку здійснюється у такій послідовності. В останній таблиці довільно вибирають рядок з від'ємним елементом $\beta_i$. Потім в *k-му* рядку знаходять позитивний елемент $b_{ir}$, що визначить незалежну змінну $t_r$, за якою буде здійснюватися транспозиція змінних на наступному кроці.

Вибір залежної змінної на $k$-му кроці здійснюється за критерієм:

$$\Delta t_r^{(k)} = \min_{\frac{-\beta_i}{b_{ir}} < 0} \left\{ \frac{-\beta_i^{(k)}}{b_{ir}^{(k)}} \right\} = -\frac{\beta_k^{(k)}}{b_{kr}^{(k)}} \, . \tag{44}$$

Індекс $k$ в правій частині (44) вкаже на незалежну змінну $s_k$, яка повинна взяти участь у транспозиції на наступному кроці.

Після здійснення чергового кроку аналізують нове опорне рішення. Якщо рішення містить хоча б одну від'ємну складову, то повторюють знову процедуру позбавлення опорного рішення від від'ємних складових. В іншому разі переходять до третього етапу.

### *Пошук оптимального опорного рішення*

Якщо в результаті пошуку припустимого рішення було отримано таблицю тільки з позитивними умовними похідними $\frac{\delta y}{\delta t_j}$, то воно є оптимальним і вирішення задачі завершується. В протилежному випадку має місце третій етап.

На третьому етапі вибір незалежної змінної визначається за допомогою довільної від'ємної умовної похідної $\frac{\delta y}{\delta t_r}$ . Індекс *r* цієї похідної вкаже на незалежну змінну $t_r$, за якою буде здійснюватися транспозиція на наступному кроці.

Вибір залежної змінної на *k*-му кроці здійснюється за критерієм:

$$\Delta t_r^{(k)} = \min_{b_{ir}<0}\left\{\frac{-\beta_i^{(k)}}{b_{ir}^{(k)}}\right\} = -\frac{\beta_k^{(k)}}{b_{kr}^{(k)}}. \tag{45}$$

Індекс *k* в правій частині (45) вкаже на незалежну змінну $s_k$, яка повинна взяти участь у транспозиції на наступному кроці.

Процес мінімізації завершують, коли на черговому кроці таблиця диференційного алгоритму не буде містить від'ємних умовних похідних. Поточне припустиме опорне рішення є одночасно і оптимальним.

**Задача 4.** Знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y = 5x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \to \min_{x\in\Omega} ; \tag{46}$$

$$\Omega: \quad \begin{aligned} &3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 - 3 = 0; \\ &2x_1 + 3x_3 - x_4 - 4 = 0; \end{aligned} \tag{47}$$

$$x_{1,2,3,4} \ge 0 . \tag{48}$$

**Розв'язання.** Сформуємо початкову таблицю диференціального алгоритму:

| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $y =$ | 5 | 1 | -1 | -1 | 0 |
| 0 = | 3 | 3 | 1 | 1 | -3 |
| 0 = | 2 | 0 | 3 | -1 | -4 |

### 1-й етап. Пошук опорного рішення

За допомогою двох кроків жорданових виключень послідовно переведемо незалежні змінні $x_1$ та $x_2$ в залежні:

| | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|---|
| $y =$ | -4 | -8/3 | -8/3 | 5 |
| $x_1 =$ | -1 | -1/3 | -1/3 | 1 |
| 0 = | -2 | 7/3 | -5/3 | -2 |

| | $x_3$ | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $y =$ | -22/3 | 2/3 | 9 |
| $x_1 =$ | -3/2 | 1/2 | 2 |
| $x_2 =$ | 7/6 | -5/6 | -1 |

Перше опорне рішення: $x^{\mathrm{T}} = [2 \quad -1 \quad 0 \quad 0]$. Отримане рішення не може вважатися допустимим, тому що містить від'ємну складову, а це суперечить умові (48).

**2-й етап. Пошук припустимого опорного рішення**

В умовах прикладу треба позбутися від'ємного елементу $\beta_2 = -1$ в останньому рядку останньої таблиці. Оскільки в цьому рядку позитивним є тільки елемент $b_{12} = \frac{7}{6}$, то він визначить незалежну змінну $x_3$ (незалежній змінній $x_3$ відповідає змінна $t_1$), яка візьме участь в транспозиції в наступному кроці.

Вибір залежної змінної здійснюється згідно з критерієм (44)

$$\Delta t_1 = \min_{\frac{\beta_i}{b_{i1}}<0}\left[-\frac{\beta_i}{b_{i1}}\right] = \min_{\frac{\beta_i}{b_{i1}}<0}\left[-\frac{\beta_1}{b_{11}};\ -\frac{\beta_2}{b_{21}}\right] = \min_{\frac{\beta_i}{b_{i1}}<0}\left[-\frac{2}{\frac{-3}{2}};\ -\frac{-1}{\frac{7}{6}}\right] = \frac{6}{7}. \qquad (49)$$

Оскільки мінімальним в (49) є друге відношення, то напрямним рядком визнається другий рядок.

Черговий крок жорданових виключень має вигляд:

| | $x_3$ | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $y =$ | -22/3 | 2/3 | 9 |
| $x_1 =$ | -3/2 | 1/2 | 2 |
| $x_2 =$ | 7/6 | -5/6 | -1 |

←

| | $x_2$ | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $y =$ | -44/7 | -32/7 | 19/7 |
| $x_1 =$ | -9/7 | -4/7 | 5/7 |
| $x_3 =$ | 6/7 | 5/7 | 6/7 |

Нове опорне рішення $x^{\mathrm{T}} = \left[\frac{5}{7} \quad 0 \quad \frac{6}{7} \quad 0\right]$ є допустимим. Функція цілі має значення $\frac{19}{7}$, і подалі воно може тільки зменшуватись, доки не досягне мінімального значення. У наведеному прикладі для пошуку допустимого опорного рішення знадобився всього один крок жорданових виключень. У загальному випадку їх може бути значно більше (у залежності від кількості від'ємних складових в опорному рішенні).

Нове опорне рішення ні є оптимальним, оскільки рядок з умовними похідними містить дві від'ємні похідні: $\frac{-44}{7}$ і $\frac{-32}{7}$.

**3-й етап. Пошук оптимального рішення**

Перша від'ємна похідна $\frac{-44}{7}$ визначає незалежну змінну $x_2$ як змінну, що візьме участь у черговій транспозиції.

Вибір залежної змінної здійснюється згідно з критерієм (45):

$$\Delta t_1 = \min_{b_{i1}<0}\left\{\frac{-\beta_i}{b_{i1}}\right\} = \min_{b_{i1}<0}\left\{\frac{-\beta_1}{b_{11}}\right\} = \min_{b_{i1}<0}\left[-\frac{\frac{5}{7}}{\frac{-9}{7}}\right].$$

Як бачимо, критерій вказує на залежну змінну $x_1$.

Здійснимо черговий крок жорданових виключень:

↓

| | $x_2$ | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $y =$ | -44/7 | -32/7 | 19/7 |
| $x_1 =$ | -9/7 | -4/7 | 5/7 |
| $x_3 =$ | 6/7 | 5/7 | 6/7 |

| | $x_1$ | $x_4$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $y =$ | 44/9 | -16/9 | -7/9 |
| $x_2 =$ | -7/9 | -4/9 | 5/9 |
| $x_3 =$ | -2/3 | 1/3 | 4/3 |

Нова таблиця має одну від’ємну похідну $\frac{-16}{9}$. Тому потрібен ще один крок. Від’ємна похідна визначає незалежну змінну $x_4$ як змінну, що візьме участь у черговій транспозиції.

Вибір залежної змінної здійснюється згідно з критерієм (45):

$$\Delta t_2 = \min_{b_{i2}<0}\left\{\frac{-\beta_i}{b_{i2}}\right\} = \min_{b_{i1}<0}\left\{\frac{-\beta_1}{b_{12}}\right\} = \min_{b_{i2}<0}\left[-\frac{\frac{5}{9}}{\frac{-4}{9}}\right].$$

Як бачимо, критерій вказує на залежну змінну $x_2$.

Здійснимо черговий крок жорданових виключень:

| | $x_1$ | $x_4$ ↓ | 1 |
|---|---|---|---|
| $y =$ | 44/9 | -16/9 | -7/9 |
| $x_2 =$ | -7/9 | -4/9 | 5/9 |
| $x_3 =$ | -2/3 | 1/3 | 4/3 |

| | $x_1$ | $x_2$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $y =$ | 8 | 4 | -3 |
| $x_4 =$ | -7/4 | -9/4 | 5/4 |
| $x_3 =$ | -5/4 | -3/4 | 7/4 |

В новій таблиці від’ємних похідних немає. Отже опорне рішення $x^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{7}{4} & \frac{5}{4} \end{bmatrix}$ є оптимальним. Сама функція досягла свого мінімального значення $y^* = -3$.

### *Особливості розв’язання задачі лінійного програмування*

Задача лінійного програмування не має рішення, коли:

*а*) на етапі пошуку припустимого опорного рішення рядок таблиці диференціального алгоритму з від’ємним елементом $\beta_i$ не містить жодного додатного елемента $b_{ij}$ , тобто задача не має жодного припустимого рішення;

*б*) на етапі пошуку оптимального опорного рішення стовпець таблиці диференціального алгоритму з від’ємною похідною $\frac{\delta y}{\delta t_r}$ не містить жодного від’ємного елемента $b_{ir}$. В цьому випадку нескінченне збільшення змінної $t_r$ призводить до нескінченного зменшення функції цілі.

# К О Н Т Р О Л Ь Н І   З А В Д А Н Н Я

## Варіант 1.

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $A^{-1}$ для матриці $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $A^{-1}A$ одиничній матриці **I**$_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x) \to \min\limits_{x \in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x) = x_1^2 x_2 + \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{4}{x_1}$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y = \dfrac{1}{2x_1^2} + 2\sqrt{x_1 x_2} + \dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon$ = 0,01, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T} = [-0{,}55 \quad -0{,}4]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y = 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 1 \to \min_{x_{1,2,3} \in \Omega},$$

$$\Omega: \quad -2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 4 = 0;$$

$$-\tilde{o}_1 + \tilde{o}_2 - x_3 - \tilde{o}_5 - 2 = 0;$$

$$x_{1,2,3,4,5} \geq 0.$$

## Варіант 2.

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $A^{-1}$ для матриці $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $A^{-1}A$ одиничній матриці **I**$_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x) \to \min\limits_{x \in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x) = 3x_2 + \frac{2x_1}{x_2} + \frac{1}{x_1^2 x_2}$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y = \dfrac{1}{2x_1^2} + 2\sqrt{x_1 x_2} + \dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon$ = 0,01, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T} = [-0{,}3 \quad -0{,}7]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 2 \to \min_{x_{1,2,3} \in \Omega},$$

$$\Omega: \quad -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2 = 0;$$

$$-2x_1 - x_2 - x_3 - x_5 + 4 = 0;$$

$$x_{1,2,3,4,5} \geq 0.$$

## Варіант 3.

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $A^{-1}$ для матриці $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ -2 & 0 & 2\end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $A^{-1}A$ одиничній матриці **I**$_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x)\to\min\limits_{x\in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x)=2x_1x_2+\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y=\dfrac{1}{2x_1^2}+2\sqrt{x_1x_2}+\dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}01$, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T}=[-0{,}35 \quad 0{,}5]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 3 \to \min_{x_{1,2,3}\in\Omega},$$

$$\Omega:\quad -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + 4 = 0;$$

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_5 - 2 = 0;$$

$$x_{1,2,3,4,5} \ge 0.$$

## Варіант 4.

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $A^{-1}$ для матриці $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 2\\ 2 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 0\end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $A^{-1}A$ одиничній матриці **I**$_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x)\to\min\limits_{x\in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x)=x_1^3+x_2^3+\frac{3}{x_1x_2}$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y=\dfrac{1}{2x_1^2}+2\sqrt{x_1x_2}+\dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}01$, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T}=[-0{,}3 \quad -0{,}4]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y = 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4 \to \min_{x_{1,2,3}\in\Omega},$$

$$\Omega:\quad x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 2 = 0;$$

$$-x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 + 4 = 0;$$

$$x_{1,2,3,4,5} \ge 0.$$

## Варіант 5.

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x)\to\min\limits_{x\in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x)=\frac{1}{4}x_1^2x_2+\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{2}{x_1}$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y=\dfrac{1}{2x_1^2}+2\sqrt{x_1x_2}+\dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon$ = 0,01, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)\mathrm{T}}=[-0{,}35 \quad -0{,}6]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування

$$y=2x_1-3x_2+x_3+5\to\min_{x_{1,2,3}\in\Omega},$$

$$\Omega:\quad -2x_1-x_2-x_3-x_4+8=0;$$

$$-x_1-x_2+x_3-x_5-4=0;$$

$$x_{1,2,3,4,5}\ge 0.$$

## Варіант 6.

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 4\\ 1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & -9\end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x)\to\min\limits_{x\in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x)=2\sqrt{x_1}+3x_2+\frac{1}{x_1x_2^3}$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y=\dfrac{1}{2x_1^2}+2\sqrt{x_1x_2}+\dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon$ = 0,01, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)\mathrm{T}}=[-0{,}4 \quad -0{,}6]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y=2x_1-3x_2+x_3+6\to\min_{x_{1,2,3}\in\Omega},$$

$$\Omega:\quad -x_1-x_2+x_3-x_4-4=0;$$

$$-2x_1-x_2-x_3-x_5+8=0;$$

$$x_{1,2,3,4,5}\ge 0.$$

## Варіант 7.

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x) \to \min\limits_{x \in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x) = 2x_1x_2 + \frac{3}{x_2} + \frac{27}{x_1^2 x_2}$.

3. За допомогою методу покоординатного спуску знайти мінімум функції $y = \dfrac{1}{2x_1^2} + 2\sqrt{x_1x_2} + \dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}01$, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)T} = [-0{,}5 \quad -0{,}3]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y = -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 7 \to \min_{x_{1,2,3} \in \Omega},$$

$$\Omega: \quad -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + 8 = 0;$$

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_5 - 4 = 0;$$

$$x_{1,2,3,4,5} \geq 0.$$

## Варіант 8.

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x) \to \min\limits_{x \in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x) = 2x_1 + \frac{2}{x_1\sqrt{x_2}} + x_2$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y = \dfrac{1}{2x_1^2} + 2\sqrt{x_1x_2} + \dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}01$, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)T} = [-0{,}5 \quad -0{,}4]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y = -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 8 \to \min_{x_{1,2,3} \in \Omega},$$

$$\Omega: \quad -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 - 4 = 0;$$

$$-x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 + 8 = 0;$$

$$x_{1,2,3,4,5} \geq 0.$$

## Варіант 9.

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x) \to \min\limits_{x \in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x) = 3x_1^3 + 3x_2^3 + \frac{9}{x_1 x_2}$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y = \frac{1}{2x_1^2} + 2\sqrt{x_1 x_2} + \frac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}01$, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T} = [-0{,}5 \quad -0{,}65]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y = x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9 \to \min_{x_{1,2,3} \in \Omega},$$

$$\Omega: \quad -x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + 2 = 0;$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 - x_5 - 1 = 0;$$

$$x_{1,2,3,4,5} \geq 0.$$

## Варіант 10.

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 7 & 6 & 2 \\ 7 & 9 & 2 \end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x) \to \min\limits_{x \in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x) = 4x_2\sqrt{x_1} + \frac{4}{x_2} + \frac{4}{\sqrt{x_1}}$.

3. За допомогою методу покоординатного спуску знайти мінімум функції $y = \frac{1}{2x_1^2} + 2\sqrt{x_1 x_2} + \frac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}01$, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T} = [-0{,}5 \quad -0{,}6]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y = x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 10 \to \min_{x_{1,2,3} \in \Omega},$$

$$\Omega: \quad x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - 1 = 0;$$

$$-x_1 - x_2 - 2x_3 - x_5 + 2 = 0;$$

$$x_{1,2,3,4,5} \geq 0.$$

**Варіант 11.**

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $A=\begin{bmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 11 & 9 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x)\to \min\limits_{x\in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x)=x_1x_2+\frac{2}{x_1^4x_2^2}+\frac{2}{x_2^2}$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y=\dfrac{1}{2x_1^2}+2\sqrt{x_1x_2}+\dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}01$, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T}=[-0{,}6 \quad 0{,}35]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y=-3x_1+x_2+2x_3+11\to \min_{x_{1,2,3}\in\Omega},$$
$$\Omega:\quad -x_1-x_2-2x_3-x_4+6=0;$$
$$-x_1+x_2-x_3-x_5-3=0;$$
$$x_{1,2,3,4,5}\ge 0.$$

**Варіант 12.**

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 9 & 8 & 5 \end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x)\to \min\limits_{x\in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x)=3x_2\sqrt[3]{x_1}+\frac{2}{x_2}+\frac{1}{x_1x_2}$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y=\dfrac{1}{2x_1^2}+2\sqrt{x_1x_2}+\dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}01$, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T}=[-0{,}6 \quad -0{,}7]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y=-3x_1+x_2+2x_3+12\to \min_{x_{1,2,3}\in\Omega},$$
$$\Omega:\quad -x_1+x_2-x_3-x_4-3=0;$$
$$-x_1-x_2-2x_3-x_5+6=0;$$
$$x_{1,2,3,4,5}\ge 0.$$

## Варіант 13.

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $A^{-1}$ для матриці $A=\begin{bmatrix}3 & 5 & 4\\ 8 & 9 & 7\\ 5 & 6 & 4\end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $A^{-1}A$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x)\to\min\limits_{x\in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x)=x_1x_2+\frac{2}{x_2}+\frac{2}{x_1^2x_2}$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y=\dfrac{1}{2x_1^2}+2\sqrt{x_1x_2}+\dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon$ = 0,01, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T}=[1{,}55 \quad 1{,}7]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y=4x_1+x_2-2x_3+13\to\min_{x_{1,2,3}\in\Omega},$$

$$\Omega:\quad -2x_1+x_2-x_3-x_4-1=0;$$

$$-2x_1-x_2-3x_3-x_5+5=0;$$

$$x_{1,2,3,4,5}\ge 0.$$

## Варіант 14.

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $A^{-1}$ для матриці $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ 3 & 1 & 7\\ 2 & 1 & 8\end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $A^{-1}A$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x)\to\min\limits_{x\in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x)=x_1^2x_2+\frac{4x_1^2}{x_2}+\frac{8}{x_1}$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y=\dfrac{1}{2x_1^2}+2\sqrt{x_1x_2}+\dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon$ = 0,01, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T}=[1{,}5 \quad 1{,}75]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y=4x_1+x_2-2x_3+14\to\min_{x_{1,2,3}\in\Omega},$$

$$\Omega:\quad -2x_1-x_2-3x_3-x_4+5=0;$$

$$-2x_1+x_2-x_3-x_5-1=0;$$

$$x_{1,2,3,4,5}\ge 0.$$

**Варіант 15.**

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $A^{-1}$ для матриці $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 7 & 10 & 12 \\ 10 & 6 & 7 \end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $A^{-1}A$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x) \to \min\limits_{x \in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x) = x_1 + \frac{2x_2}{\sqrt{x_1}} + \frac{2}{x_2}$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y = \dfrac{1}{2x_1^2} + 2\sqrt{x_1 x_2} + \dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon$ = 0,01, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)T} = [1{,}5 \quad 1{,}45]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y = x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 15 \to \min_{x_{1,2,3} \in \Omega},$$
$$\Omega: \quad x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 - 2 = 0;$$
$$-x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_5 + 10 = 0;$$
$$x_{1,2,3,4,5} \geq 0.$$

**Варіант 16.**

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $A^{-1}$ для матриці $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 5 & 9 & 9 \\ 1 & 7 & 10 \end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $A^{-1}A$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x) \to \min\limits_{x \in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x) = \sqrt{x_1 x_2} + \frac{9}{x_2} + \frac{36}{x_1}$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y = \dfrac{1}{2x_1^2} + 2\sqrt{x_1 x_2} + \dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon$ = 0,01, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)T} = [1{,}5 \quad 1{,}6]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y = x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 16 \to \min_{x_{1,2,3} \in \Omega},$$
$$\Omega: \quad -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 + 10 = 0;$$
$$x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 - 2 = 0;$$
$$x_{1,2,3,4,5} \geq 0.$$

## Варіант 17.

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $A^{-1}$ для матриці $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 3 & 3\\ 1 & -2 & -1\end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $A^{-1}A$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x)\to\min\limits_{x\in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x)=\frac{2}{9}x_1x_2^4+\frac{8}{x_1}+\frac{16}{3x_2}$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y=\dfrac{1}{2x_1^2}+2\sqrt{x_1x_2}+\dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon$ = 0,01, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T}=[1{,}5 \quad 1{,}65]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y=-2x_1+4x_2+x_3+17\to\min_{x_{1,2,3}\in\Omega},$$
$$\Omega:\quad -x_1-2x_2+x_3-x_4-1=0;$$
$$-3x_1-x_2-x_3-x_5+5=0;$$
$$x_{1,2,3,4,5}\geq 0.$$

## Варіант 18.

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $A^{-1}$ для матриці $A=\begin{bmatrix}5 & 4 & 2\\ 8 & 9 & 4\\ 13 & 9 & 5\end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $A^{-1}A$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x)\to\min\limits_{x\in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x)=x_1^2x_2+\frac{3}{x_2}+\frac{2x_2}{x_1}$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y=\dfrac{1}{2x_1^2}+2\sqrt{x_1x_2}+\dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon$ = 0,01, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T}=[1{,}5 \quad 1{,}4]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y=-2x_1+4x_2+x_3+18\to\min_{x_{1,2,3}\in\Omega},$$
$$\Omega:\quad -3x_1-x_2-x_3-x_4+5=0;$$
$$-x_1-2x_2+x_3-x_5-1=0;$$
$$x_{1,2,3,4,5}\geq 0.$$

## Варіант 19.

1 За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $A=\begin{bmatrix}5 & 4 & 5\\ 8 & 7 & 9\\ 1 & 2 & 2\end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2 Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x)\to\min\limits_{x\in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x)=x_2+\frac{2x_1}{\sqrt{x_2}}+\frac{2}{x_1}$.

3 За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y=\dfrac{1}{2x_1^2}+2\sqrt{x_1x_2}+\dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon$ = 0,01, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T}=[1{,}4 \quad 1{,}65]$.

4 За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y=4x_1-2x_2+x_3+19\to\min_{x_{1,2,3}\in\Omega},$$

$$\Omega:\quad -2x_1-x_2+x_3-x_4-2=0;$$

$$-x_1-3x_2-x_3-x_5+10=0;$$

$$x_{1,2,3,4,5}\geq 0.$$

## Варіант 20.

1 За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 2\\ 3 & 2 & 3\end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2 Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x)\to\min\limits_{x\in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x)=x_2\sqrt{x_1}+\frac{4}{x_1x_2}+\frac{1}{x_2}$.

3 За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y=\dfrac{1}{2x_1^2}+2\sqrt{x_1x_2}+\dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon$ = 0,01, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T}=[1{,}4 \quad 1{,}7]$.

4 За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y=4x_1-2x_2+x_3+20\to\min_{x_{1,2,3}\in\Omega},$$

$$\Omega:\quad -x_1-3x_2-x_3-x_4+10=0;$$

$$-2x_1-x_2+x_3-x_5-2=0;$$

$$x_{1,2,3,4,5}\geq 0.$$

**Варіант 21.**

1 За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $A^{-1}$ для матриці $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $A^{-1}A$ одиничній матриці **I**3.

2 Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x) \to \min\limits_{x \in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x) = x_2\sqrt{x_1} + \frac{1}{2x_1} + \frac{8}{x_1 x_2^4}$.

3 За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y = \dfrac{1}{2x_1^2} + 2\sqrt{x_1 x_2} + \dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon$ = 0,01, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T} = [1{,}4 \quad 1{,}55]$.

4 За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y = x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 21 \to \min_{x_{1,2,3} \in \Omega},$$

$$\Omega: \quad x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 - 3 = 0;$$

$$-x_1 - 3x_2 - x_3 - x_5 + 15 = 0;$$

$$x_{1,2,3,4,5} \geq 0.$$

**Варіант 22.**

1 За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 4 \end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ одиничній матриці **I**3.

2 Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x) \to \min\limits_{x \in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x) = 2\sqrt{x_2} + \frac{x_1}{4x_2^2} + \frac{1}{x_1}$.

3 За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y = \dfrac{1}{2x_1^2} + 2\sqrt{x_1 x_2} + \dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon$ = 0,01, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T} = [1{,}4 \quad 1{,}3]$.

4 За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y = x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 22 \to \min_{x_{1,2,3} \in \Omega},$$

$$\Omega: \quad -x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 + 15 = 0;$$

$$x_1 - x_2 - 2x_3 - x_5 - 3 = 0;$$

$$x_{1,2,3,4,5} \geq 0.$$

## Варіант 23.

1 За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $A=\begin{bmatrix}4 & 3 & 6\\ 4 & 5 & 10\\ 5 & 6 & 10\end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2 Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x)\to\min\limits_{x\in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x)=x_1x_2+\frac{4}{x_2\sqrt{x_1}}+\frac{2}{\sqrt{x_1}}$.

3 За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y=\dfrac{1}{2x_1^2}+2\sqrt{x_1x_2}+\dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon$ = 0,01, прийнявши за початкове наближення точку $\Omega:\ \ -x_1+x_2-x_3-x_4+6=0$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y=-2x_1+x_2+4x_3+23\to\min_{x_{1,2,3}\in\Omega},$$

$$\Omega:\ \ -x_1+x_2-2x_3-x_4-3=0;$$

$$-3x_1-x_2-x_3-x_5+15=0;$$

$$x_{1,2,3,4,5}\ge 0.$$

## Варіант 24.

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}5 & 1 & -2\\ 9 & 3 & -1\\ 8 & 4 & -1\end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x)\to\min\limits_{x\in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x)=4\frac{x_2}{x_1^2}+x_1+\frac{2}{\sqrt{x_2}}$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y=\dfrac{1}{2x_1^2}+2\sqrt{x_1x_2}+\dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon$ = 0,01, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T}=[1{,}7\quad 1{,}3]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y=-2x_1+x_2+4x_3+24\to\min_{x_{1,2,3}\in\Omega},$$

$$\Omega:\ \ -3x_1-x_2-x_3-x_4+15=0;$$

$$-x_1+x_2-2x_3-x_5-3=0;$$

$$x_{1,2,3,4,5}\ge 0.$$

**Варіант 25.**

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $A=\begin{bmatrix}6 & 7 & 3\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $A^{-1}A$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x)\to\min\limits_{x\in R^2}$ методом Ейлера, якщо: $y(x)=2\sqrt{x_1x_2}+\frac{1}{x_1}+\frac{16}{x_1x_2^2}$.

3. За допомогою методу покоординатного спуску знайти мінімум функції $y=\dfrac{1}{2x_1^2}+2\sqrt{x_1x_2}+\dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon$ = 0,01, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T}=[1{,}35 \quad 1{,}6]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y=x_1-4x_2+2x_3+25\to\min_{x_{1,2,3}\in\Omega},$$
$$\Omega:\quad -x_1+x_2-x_3-x_4+6=0;$$
$$x_1-3x_2-3x_3-x_5-2=0;$$
$$x_{1,2,3,4,5}\geq 0.$$

**Варіант 26.**

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $A=\begin{bmatrix}0 & 4 & 1\\ 2 & 3 & 3\\ 4 & 6 & 4\end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x)\to\min\limits_{x\in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x)=4x_1x_2^2+\frac{1}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y=\dfrac{1}{2x_1^2}+2\sqrt{x_1x_2}+\dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon$ = 0,01, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T}=[1{,}6 \quad 1{,}3]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y=x_1-4x_2+2x_3+26\to\min_{x_{1,2,3}\in\Omega},$$
$$\Omega:\quad x_1-3x_2-3x_3-x_4-2=0;$$
$$-x_1+x_2-x_3-x_5+6=0;$$
$$x_{1,2,3,4,5}\geq 0.$$

## Варіант 27.

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $\mathbf{A}^{-1}$ для матриці $A=\begin{bmatrix} 2 & -7 & -1 \\ -4 & 4 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $A^{-1}A$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x) \to \min\limits_{x \in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x) = 4x_1^2 x_2 + \frac{2}{\sqrt{x_2}} + \frac{1}{x_1}$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y = \dfrac{1}{2x_1^2} + 2\sqrt{x_1 x_2} + \dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}01$, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T} = [1{,}35 \quad 1{,}25]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y = 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 27 \to \min_{x_{1,2,3} \in \Omega},$$

$$\Omega: \quad 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 4 = 0;$$

$$-3x_1 + x_2 - x_3 - x_5 - 3 = 0;$$

$$x_{1,2,3,4,5} \ge 0$$

## Варіант 28.

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $A^{-1}$ для матриці $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $A^{-1}A$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x) \to \min\limits_{x \in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x) = x_1 + \frac{6}{x_1\sqrt{x_2}} + 9x_1 x_2$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y = \dfrac{1}{2x_1^2} + 2\sqrt{x_1 x_2} + \dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon = 0{,}01$, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T} = [1{,}65 \quad 1{,}3]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y = 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 28 \to \min_{x_{1,2,3} \in \Omega},$$

$$\Omega: \quad -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - 2 = 0;$$

$$-4x_1 - x_2 - x_3 - x_5 + 5 = 0;$$

$$x_{1,2,3,4,5} \ge 0.$$

## Варіант 29.

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $A^{-1}$ для матриці $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $A^{-1}A$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x) \to \min\limits_{x \in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x) = 2x_1x_2 + \frac{25}{x_1\sqrt{x_2}} + \frac{20}{\sqrt{x_2}}$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y = \dfrac{1}{2x_1^2} + 2\sqrt{x_1x_2} + \dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon$ = 0,01, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T} = [1{,}5 \quad 1{,}7]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y = 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 29 \to \min_{x_{1,2,3} \in \Omega},$$

$$\Omega: \quad -x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 + 4 = 0;$$

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_5 - 2 = 0;$$

$$x_{1,2,3,4,5} \ge 0.$$

## Варіант 30.

1. За допомогою жорданових виключень знайти обернену матрицю $A^{-1}$ для матриці $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -3 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$. Перевірити рівність добутку $A^{-1}A$ одиничній матриці $\mathbf{I}_3$.

2. Вирішити задачу безумовної мінімізації $y(x) \to \min\limits_{x \in R^2}$ методом Ейлера, якщо $y(x) = 5x_1x_2 + \frac{1}{5x_2\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_1}}$.

3. За допомогою методу по координатного спуску знайти мінімум функції $y = \dfrac{1}{2x_1^2} + 2\sqrt{x_1x_2} + \dfrac{1}{2x_2^2}$ з точністю обчислення $\varepsilon$ = 0,01, прийнявши за початкове наближення точку $x^{(0)^T} = [1{,}45 \quad 1{,}35]$.

4. За допомогою диференціального алгоритму знайти рішення задачі лінійного програмування:

$$y = 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 30 \to \min_{x_{1,2,3} \in \Omega},$$

$$\Omega: \quad x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 - 1 = 0;$$

$$-3x_1 - 2x_2 - x_3 - x_5 + 5 = 0;$$

$$x_{1,2,3,4,5} \ge 0.$$

# Д О Д А Т К И

## Додаток А. *ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ*

### *А.1. Алгебраїчні функції*

*Особливості степенів*

Для будь-яких *õ, ó* і додатних *à, b* справедливі такі рівності:

$$a^0 = 1; \qquad (ab)^x = a^x b^x; \qquad a^x a^y = a^{x+y}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \qquad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}; \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x};$$

$$\left(a^x\right)^y = a^{xy}.$$

*Многочлени*

Для будь-яких *à, b, c* справедливі такі рівності:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$
$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$
$$a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right);$$
$$a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right);$$
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

де $x_1, x_2$ – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

*Особливості арифметичних коренів*

Для будь-яких натуральних *ò* , *k* , більших за 1, і будь-яких *à, b* справедливі такі рівності:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}; \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a \quad (a \ge 0);$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \ne 0); \qquad \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}, \quad \text{якщо} \quad 0 \le a < b;$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[kn]{a};$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}; \qquad \sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & \text{при} \quad a \ge 0, \\ -a & \text{при} \quad a < 0; \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|; \qquad \sqrt[2n+1]{-a} = -\sqrt[2n+1]{a} \quad (a \ge 0).$$

### *А.2. Тригонометричні функції*

Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того ж аргументу:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1; \qquad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad x \ne \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z;$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad x \ne \pi n, \quad n \in Z; \qquad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1, \quad x \ne \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbf{Z};$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \ne \frac{\pi}{2}(2n+1), \quad n \in Z; \qquad 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \ne \pi n, \quad n \in Z.$$

*Формули додавання:*

$$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y;\qquad \sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y;$$

$$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y;\qquad \cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y;$$

$$\mathrm{tg}(x+y)=\frac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y}{1-\mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{tg}\,y},\quad x,y,x+y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z;$$

$$\mathrm{tg}(x-y)=\frac{\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,y}{1+\mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{tg}\,y},\quad x,y,x-y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z.$$

*Формули подвійного аргументу:*

$$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x;$$

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x;$$

$$\mathrm{tg}\,2x=\frac{2\mathrm{tg}\,x}{1-\mathrm{tg}^2 x},\quad x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\quad k\in Z,\quad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z.$$

*Формули половинного аргументу:*

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2};\qquad \cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2};$$

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x},\quad x\neq\pi+2\pi n,\quad n\in Z.$$

*Формули перетворення:*

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2};\qquad \sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2};\qquad \cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\mathrm{tg}\,x-\mathrm{tg}\,y=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cdot\cos y},\quad x,y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\quad n\in Z;$$

$$2\sin x\cdot\sin y=\cos(x-y)-\cos(x+y);\qquad 2\cos x\cdot\cos y=\cos(x-y)+\cos(x+y);$$

$$2\sin x\cdot\cos y=\sin(x-y)+\sin(x+y).$$

Співвідношення між $\sin x, \cos x, \mathrm{tg}\frac{x}{2}$:

$$\sin x=\frac{2\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}},\quad x\neq(2n+1)\pi,\quad n\in Z;\qquad \cos=\frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}},\quad x\neq(2n+1)\pi,\quad n\in Z.$$

## *А.3. Особливості логарифмів*

$$x=a^{\log_a x},\quad x>0.$$

$$\log_a a=1;\qquad \log_a 1=0;$$

$$\log_a(x_1x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2,\quad x_{1,2}>0;$$

$$\log_a\frac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2,\quad x_{1,2}>0;$$

$$\log_a x^p=p\log_a x,\quad x>0,\quad p\in R;$$

$$\log_a x=\frac{\log_a x}{\log_b a},\quad x>0,\quad b>0,\quad b\neq 1.$$

## Додаток В. *ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ*

### *В.1. Похідна*: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

### *В.2. Правила диференціювання:*

$c' = 0$; $\quad (cU)' = cU'$;

$(U \pm V)' = U' \pm V'$; $\quad (U \cdot V)' = U'V + UV'$;

$\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V + UV'}{V^2}$; $\quad (f(U))'_x = f'_U \cdot U'_x$.

Тут $c$ – константа, $U = U(x)$, $V = V(x)$.

### *В2. Формули диференціювання:*

$(U^a)' = aU^{a-1}U', \quad a \in R$; $\quad (\log_a U)' = \dfrac{U'}{U \ln a}$;

$(\ln U)' = \dfrac{U'}{U}$; $\quad (a^U)' = a^U \ln a \cdot U'$;

$(\sin U)' = \cos U \cdot U'$; $\quad (\cos U)' = -\sin U \cdot U'$;

$(\mathrm{tg} U)' = \dfrac{1}{\cos^2 U} U'$; $\quad (\mathrm{ctg} U)' = -\dfrac{1}{\sin^2 U} U'$;

$(\arcsin U)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-U^2}} U'$; $\quad (\arccos U)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-U^2}} U'$;

$(\mathrm{arctg} U)' = \dfrac{1}{1+U^2} U'$; $\quad (\mathrm{arcctg} U)' = -\dfrac{1}{1+U^2} U'$.

Тут $U = U(x)$. Якщо $U(x) = x$, то $U'(x) = x' = 1$.

## Додаток С. *ЗРАЗОК ОФОРМЛЕННЯ ТИТУЛЬНОЇ СТОРІНКИ*

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКА НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ
МІСЬКОГО ГОСПОДАРСТВА

Факультет ***Заочний***

Контрольна робота з предмету ***Математичне програмування*** .

Студент ***3-го*** курсу. Група ***МГКТС-1*** . Шифр ***20547***.

Прізвище, ім'я, по-батькові ***Савіна Олена Єреміївна***

Домашня адреса: ***61100, Вінницька обл., м. Жмеринка,***

***вул. Гостела, 20, кв 146.***

Дата виконання роботи ***20.03.11***. Варіант ***№ 17.***

Відмітка про залік ______________ Підпис викладача ______________

*Навчальне видання*

Методичні вказівки
до виконання контрольної роботи
з дисципліни
**“Математичне програмування ”**
(для студентів 3-го курсу заочної форми навчання освітньо-кваліфікаційного рівня бакалавр у галузі знань 0306 «Менеджмент і адміністрування» за напрямом підготовки 6.030601 «Менеджмент»).

Укладачі: **Самойленко** Микола Іванович,
**Клименко** Олександр Васильович,
**Білогурова** Ганна Вікторівна,
**Костенко** Олександр Борисович,
**Штельма** Ольга Миколаївна.

Відповідальний за випуск: *О. Б. Костенко*

*За авторською редакцією*

Комп’ютерне верстання *К. А. Алексанян*

План 2011, поз. 453М

| | |
|---|---|
| Підп. до друку 07.06.2011р. | Формат 60х84/16 |
| Друк на різографі. | Ум. друк. арк. 4,1 |
| Зам. № | Тираж 50 пр. |

Видавець і виготовлювач:
Харківський національний університет
міського господарства ім. О. М. Бекетова,
вул. Революції, 12, Харків, 61002
Електронна адреса: rectorat@ksame.kharkov.ua
Свідоцтво суб’єкта видавничої справи:
ДК № 4064 від 12. 05. 2011 р.